

If:

$$\sin(A + iB) = x + iy$$

then prove that :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

$$\text{and } \frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$$

(स) श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2^2} \sin 3\alpha + \dots$$

Find the sum of the series :

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2^2} \sin 3\alpha + \dots$$

# DD-2648

## B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part I) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper First

(Algebra and Trigonometry)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) प्रारम्भिक रूपांतरण की सहायता से A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Find the inverse of A with elementary transformation :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ब) कैले-हैमिल्टन प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley-Hamilton theorem.

(स) निम्नलिखित आव्यूह को प्रसामान्य रूप में बदलिए एवं इसकी जाति तथा शून्यता ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix into normal form and find its rank and nullity :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

इकाई-2

(UNIT-2)

2. (अ) निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि की प्रारम्भिक सक्रियाओं द्वारा हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

Solve the following equations with the help of elementary operations of matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

(ब) फेरारी विधि से चतुर्घात को हल कीजिए :

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$$

Solve the biquadratic by Ferrari's method :

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$$

(स) यदि समीकरण  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$  के मूल हरात्मक श्रेणी (H. P.) में हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$27r^2 - 9pqr + 2q^3 = 0$$

If roots of the equation  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$  are in H. P., then prove that :

$$27r^2 - 9pqr + 2q^3 = 0$$

इकाई-3

(UNIT-3)

3. (अ) यदि  $f : A \rightarrow B$  एकैकी आच्छादक हो, तो दर्शाइये कि  $f^{-1} : B \rightarrow A$  भी एकैकी आच्छादक होगा।

If  $f : A \rightarrow B$  is one-one onto, then show that

$f^{-1} : B \rightarrow A$  is also one-one onto.

(ब) लैग्रान्ज के प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's theorem.

5. (अ) यदि :

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta,$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(i) \quad x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta$$

$$(ii) \quad x^n - \frac{1}{x^n} = 2i \sin n\theta$$

If:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta,$$

then prove that :

$$(i) \quad x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta$$

$$(ii) \quad x^n - \frac{1}{x^n} = 2i \sin n\theta$$

(ब) यदि :

$$\sin(A + iB) = x + iy,$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

$$\text{तथा } \frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$$

(स) सिद्ध कीजिए कि एक समूह  $G$  के अखिल उपसमुच्चय  $H$  के एक उपसमूह होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि :

$$a \in H, b \in H \rightarrow ab^{-1} \in H$$

जहाँ  $b^{-1}, b$  का प्रतिलोम है।

Prove that necessary and sufficient condition for a non-empty subset  $H$  of a group  $G$  to be a subgroup is that :

$$a \in H, b \in H \rightarrow ab^{-1} \in H$$

where  $b^{-1}$  is an inverse of  $b$ .

इकाई-4

4. (अ) दिखाइये कि एक चक्रीय समूह, जिसकी कोटि  $n$  है, इकाई के  $n$ वें मूल के समूह से तुल्यकारी होता है।

Show that a cyclic group with finite order  $n$  is isomorphic to the multiplicative group of  $n$ th roots of unity.

(ब) सिद्ध कीजिए कि दो उपदलयों का सर्वनिष्ठ एक उपदलय होता है।

Prove that intersection of two subgroups is a subgroup.

(स) दिखाइये कि प्रत्येक क्षेत्र अनिवार्यतः एक पूर्णांकिय प्रान्त होता है।

Show that each field is necessarily an integral domain.